

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală: 21 februarie 2016

Filiera teoretică: profilul științele naturii

Clasa a X-a- barem de corectare

1. Calculați valoarea raportului $\frac{x}{y}$ știind că $\lg(x - 2y) = \frac{\lg x + \lg y}{2}$.

$$\frac{x}{y} > 2, x > 0, y > 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$(x - 2y)^2 = xy \dots\dots\dots 2p$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 4 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{x}{y} \in \left\{4, \frac{1}{2}\right\} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Soluție convenabilă } \frac{x}{y} = 4 \dots\dots\dots 1p$$

2. Dacă x este una dintre rădăcinile complexe ale ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ calculați:

a) $(1 + x)^{6n} + (1 + x^2)^{6m} + (x + x^2)^{6p}$;

b) $(a + b)(a + bx)(a + bx^2)$.

$$a) x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0, x \neq 1 \Rightarrow x^3 = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$x + 1 = -x^2, x^2 + x = -1, x^2 + 1 = -x \dots\dots\dots 1p$$

$$(1 + x)^{6n} = (-x^2)^{6n} = 1; (1 + x^2)^{6m} = (-x)^{6m} = 1; (x + x^2)^{6p} = (-1)^{6p} = 1, \text{ suma lor este } 3 \dots\dots\dots 2p$$

$$b) (a + b)(a + bx)(a + bx^2) = (a^2 + abx + ab + b^2x)(a + bx^2) = (a^2 - abx^2 + b^2x)(a + bx^2) = a^3 + b^3 \dots\dots\dots 2p$$

3. Arătați că $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = x \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Ridicare corectă la putere} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Obținerea ecuației } x^3 + 3x - 14 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$x = 2 \in \mathbb{Q} \text{ soluție unică} \dots\dots\dots 2p$$

4. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, x \geq 3 \\ 2x-5, x < 3 \end{cases}$

a) trasați graficul

b) arătați că este bijectivă

c) calculați inversa ei

$$\text{trasarea graficului} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{demonstrarea bijectivității} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{calculul inversei} \dots\dots\dots 3p$$